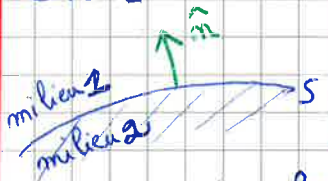


(nr) Conditions aux limites

C16 -



CL:
$$\begin{cases} (1) \hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s & (2) \hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ (3) \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 & (4) \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \end{cases}$$

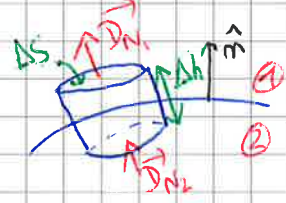


$$\begin{cases} \rho_s = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \rho_{nr} \Delta z \quad [C/m^2] \\ \vec{J}_s = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \vec{J} \Delta z \quad [A/m] \end{cases}$$

Rq2:
$$\vec{D}_N = (\vec{D} \cdot \hat{n}) \hat{n}; \quad \hat{n} \times \vec{D} = \hat{n} \times (\vec{D}_N + \vec{D}_T) = \hat{n} \times \vec{D}_T \begin{cases} \text{mag: } |\vec{D}_T| \\ \text{dir: } \perp \text{ à } \vec{D}_T \text{ et } \hat{n} \end{cases}$$

C17 -

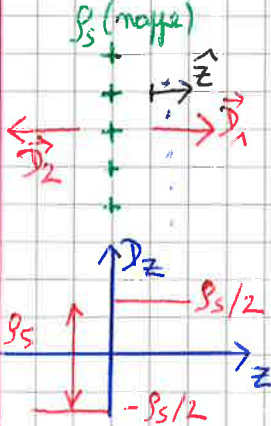
$$(1) \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{nr}) dV \Rightarrow \underbrace{\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}_{\Psi_S} = \underbrace{\int_V \rho_{nr} dV}_{Q_V}$$



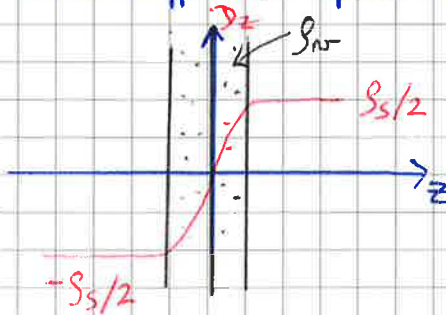
$$\begin{cases} \Psi_S = D_{N1} \Delta S - D_{N2} \Delta S + D_{tan} 2\pi r \Delta h \\ Q_V = \rho_{nr} \Delta S \Delta h \end{cases}$$

On prend $\Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \Psi_S \rightarrow (D_{N1} - D_{N2}) \Delta S$ et $Q_V \rightarrow (\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \rho_{nr} \Delta h) \Delta S = \rho_s \Delta S$

$\Rightarrow D_{N1} - D_{N2} = \hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$ QED



Et si la nappe est d'épaisseur finie?

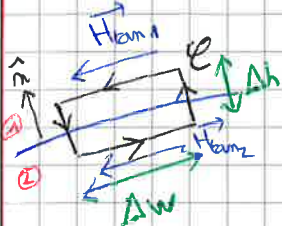
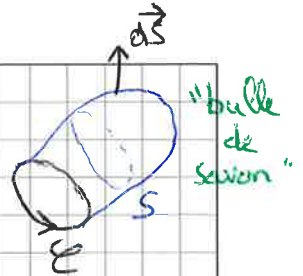


D_N est continue car $\rho_s = 0$



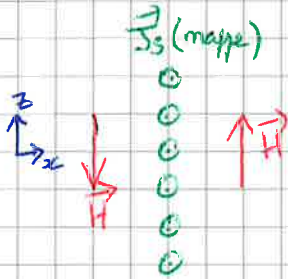
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

$$(3) \int_S (\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}) \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{J} + j\omega \vec{D}) \cdot d\vec{S}$$



$$H_{tan1} \Delta w - H_{tan2} \Delta w + H_N \Delta h = j\omega \underbrace{D}_{\text{à travers } \epsilon} \Delta h \Delta w + \underbrace{J_s}_{\text{à travers } \epsilon} \Delta h \Delta w$$

$$\Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow H_{tan1} - H_{tan2} = J_s \Rightarrow \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$



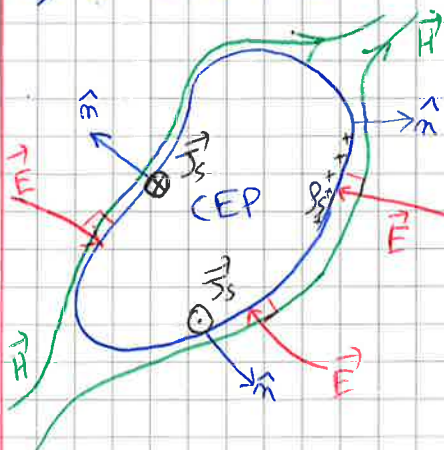
(2) et (4) : idem (1) et (3) .

C18- Conducteur électrique parfait (CEP)

Conducteur électrique : $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ Loi d'Ohm locale "I = U/R"
↳ conductivité

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur du CEP (sinon $\vec{J} \rightarrow \infty$, non physique)

$\Rightarrow \vec{B} = \vec{D} = \vec{H} = 0$



$$\hat{n} \cdot \vec{D} = \rho_s \quad \hat{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s$$

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0 = H_N$$

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 = E_{tan}$$

Près d'un CEP, $\vec{E}$ est normal, $\vec{H}$ est tangent, des courants existent en surface.



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

b. Théorèmes

a) Théorème de Poynting

C19 - Domaine temporel Dans le vide

$$\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}) \quad \text{On utilise } \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$-\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} - \vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}$$

$$\Rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})) dV = -\mu_0 \underbrace{\vec{H} \cdot \partial_t \vec{H}}_{\frac{1}{2} \partial_t (\vec{H} \cdot \vec{H})} - \epsilon_0 \underbrace{\vec{E} \cdot \partial_t \vec{E}}_{\frac{1}{2} \partial_t (\vec{E} \cdot \vec{E})} - \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$

$$\Rightarrow \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = - \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV - \partial_t \left(\frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \right) dV$$

ω_m : densité d'énergie magnétique, J/m³ ω_e : densité d'énergie électrique, J/m³

$$\Rightarrow \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = - \partial_t \int_V \left(\frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \right) dV - \int_V \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{j}}_{\frac{V}{m} \frac{A}{m^2} m^3} dV$$

$\frac{V}{m} \frac{A}{m^2} m^2$
 $V/A = W$
 puissance

$\left(\frac{H}{m} \frac{A^2}{m^2} + \frac{E}{m} \frac{V^2}{m^2} \right) m^3$
 $\frac{V}{A} \frac{A^2}{m^2} + \frac{A}{V} \frac{V^2}{m^2} = V A s = J$
 énergie

$\frac{V}{m} \frac{A}{m^2} m^3$
 puissance



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

C20 Interprétation en temporel

$$-\int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV = \partial_t \int_V \left(\frac{1}{2} \mu_0 \vec{j}^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \right) dV + \oint_S (\vec{E} \times \vec{j}) \cdot d\vec{S}$$

puissance totale fournie
dans le volume
par les courants $\vec{j}$

= faire varier l'énergie
contenue dans le champ $\vec{E}$
soit $\vec{j}$

+ ou
sort de V à
travers S

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{j}$ vecteur de Poynting $[W/m^2]$ = flux d'énergie EM en un point

$$Rq: \vec{F}_{em} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

puissance fournie à q : $\vec{F}_{em} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v} = P_q$

par unité de vol: $P = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

C21 - Version phasors Dans le vide

$$\vec{H}: \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \epsilon_0 \vec{E} \end{cases}^* \cdot \vec{E}$$

Faisons apparaître la puissance moyenne $\frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \cdot \vec{J}^* \}$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}^* = \vec{E} \cdot \vec{J}^* - j\omega \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (1)$$

Cherchons à utiliser l'identité $\vec{H}^* \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}^* = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*)$

$$\Rightarrow \vec{H}^* \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}^* \cdot \vec{H} \quad (2)$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

$$(2) - (1) \text{ donne } \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = -j\omega (\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^*) - \vec{E} \cdot \vec{J}^*$$

$$\Rightarrow - \int_V \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}^* dV = j\omega \int_V \frac{1}{2} (\mu_0 |\vec{H}|^2 - \epsilon_0 |\vec{E}|^2) dV + \oint_S \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S}$$

version complexe complète

$$\Rightarrow - \int_V \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E} \cdot \vec{J}^* \} dV = \underbrace{\operatorname{Re} \left\{ j\omega \int_V \frac{1}{2} (\mu_0 |\vec{H}|^2 - \epsilon_0 |\vec{E}|^2) dV \right\}}_{=0} + \operatorname{Re} \oint_S \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow - \int_V \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E} \cdot \vec{J}^* \} dV = \operatorname{Re} \oint_S \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S}$$

version réelle (bilan de puissance active)

partie imaginaire = bilan de puissance réactive

C.22 - Interprétation

$$- \int_V \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E} \cdot \vec{J}^* \} dV = \text{puissance fournie par les sources } \vec{J} \text{ en moyenne sur un cycle de longueur } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ j\omega \int_V \frac{1}{2} (\mu_0 |\vec{H}|^2 - \epsilon_0 |\vec{E}|^2) dV \right\} = 0 = \text{variation de l'énergie stockée dans } V \text{ sur un cycle}$$

$$\operatorname{Re} \oint_S \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} = \text{flux de puissance sortant de } V \text{ moyenné sur un cycle}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad \text{phaseur du vecteur de Poynting } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$